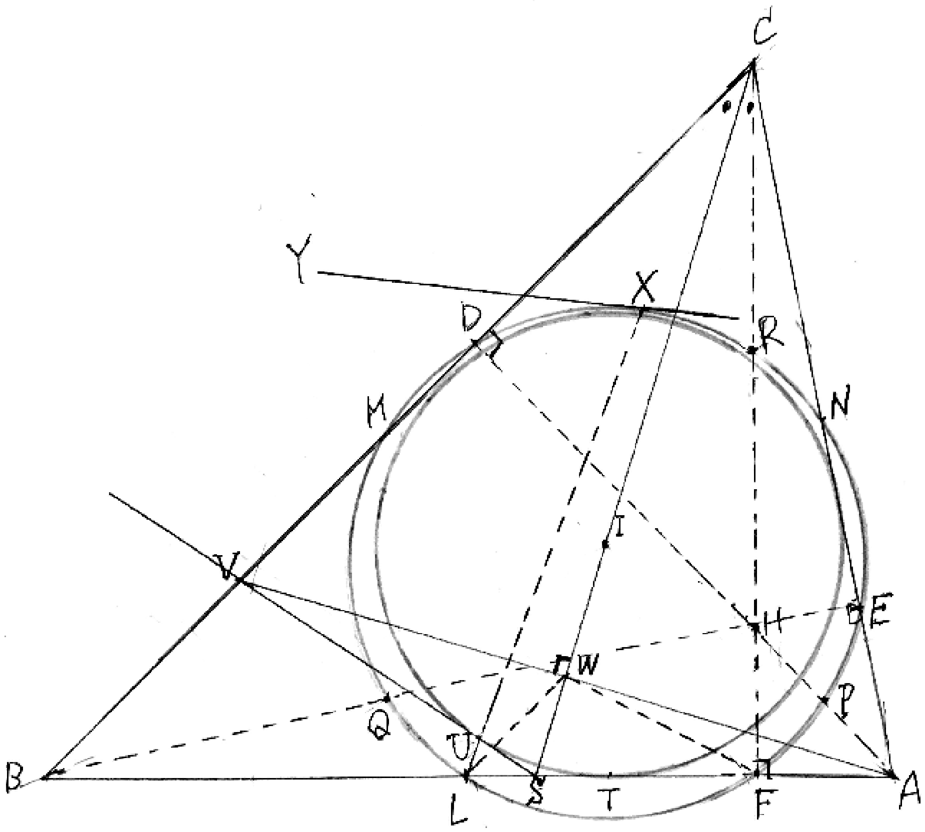
フォイエルバッハ 200 周年

1822 年，ドイツの数学者**カール・フォイエルバッハ**（Karl Wilhelm Feuerbach，1800～1834）が発見した「**九点円**」（フォイエルバッハ円，Nine-point circle，Feuerbach's circle）に関連する「フォイエルバッハの定理」（Feuerbach's theorem）のうち，「**三角形の九点円は，内接円と接する**」という定理の証明を紹介する。 → **200 周年** 2022 年



（図 1）

九点円の紹介

△ABC の辺 AB，BC，CA，の中点をそれぞれ L，M，N； 頂点 A，B，C から対辺に下した垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。次に，直線 AD，BE，CF は 1 点で交わる。これが△ABC の垂心 H である。線分 AH，BH，CH の中点をそれぞれ P，Q，R とする。すると，これまで定義してきた 9 点 L，M，N，D，E，F，P，Q，R は同一円周上にある。この円が「**九点円**」である。九点円の中心は，△ABC の外心 O と垂心 H を結ぶ線分 OH の中点 K である。ここでは証明を省略する。

山脇の超数学講座 No. 44

さて，△ABC の内心を I とし，直線 CI と辺 AB の交点を S，点 S より内接円に接線を引き，接点を U，接線と辺 BC との交点を V，直線 AV と直線 CS の交点を W とする。さらに内接円と辺 AB の接点を T とする。△ABC の辺の長さの関係は，BC＞AB＞CA とする。

ここで，直線 LU と内接円との交点を X とする。**点 X が内接円と九点円との接点になっている**ことを，以下のように証明する。　〈 （図 1）を参照のこと 〉

$\boxed{\text{証明}}$　直線 CI は∠C の二等分線であり，直線 ST，SU が内接円の接線であることをふまえると，A と V は直線 CI に関して対称の位置にある。よって，AW＝VW，AV⊥CS

これより $LW \parallel BV$ ……①

A，C，W，F は，辺 AC を直径とする円周上の点であり，

$\angle WFL = \angle WCA = \angle WCB = \angle SWL$ （∵ ①）

よって，接弦定理の逆により，直線 LW は △SFW の外接円に接する。

方べきの定理により，$LW^2 = LS \cdot LF$ ……②

数学者フォイエルバッハ

$$LW = \frac{1}{2}BV = \frac{1}{2}(BC - VC) = \frac{1}{2}(BC - AC)$$

内接円と辺の長さとの関係より，$LT = \frac{1}{2}(BC + AC - 2y) - (AC - y) = \frac{1}{2}(BC - AC)$

〈 （図 2）を参照のこと 〉

ゆえに，$LW = LT$　②より，$LS \cdot LF = LT^2 = LU \cdot LX$

方べきの定理の逆により，S，U，X，F は同一円周上にあり，

$\angle LXF = \angle BSV = \angle CVS - \angle B = \angle A - \angle B$ ……③

△AFC は直角三角形で，N は辺 AC の中点だから，$NA = NF$

よって，$\angle NAF = \angle NFA$ ……④，　$\angle ALN + \angle LNF = \angle NFA$ ……⑤

④，⑤より，$\angle LNF = \angle NAF - \angle ALN = \angle A - \angle B$ ……⑥

③，⑥より，$\angle LXF = \angle LNF$　つまり，点 X は，九点円上にも存在する。

さらに，点 X における内接円の接線を，図のように XY とすると

$\angle YXL = \angle VUX = \angle LFX$

となり，接弦定理の逆により，直線 XY は 九点円にも接している。（証明終わり）

（図 2）